VERTIEFUNGEN

ANHANG

1 DIE ATOME DER ZAHLEN

1.1 Eine intragalaktische Grußbotschaft

Der Astronom Carl Sagan, Autor des populärwissenschaftlichen Weltbestsellers *Unser Kosmos* und Moderator der gleichnamigen, in den frühen Achtzigerjahren sehr beliebten Fernsehserie, veröffentlichte wenige Jahre vor seinem Tod den utopischen Roman *Contact*, der (mit Jodie Foster in der Hauptrolle) auch verfilmt wurde. Kernthema des Romans sind die Existenz einer außerirdischen Intelligenz und die Möglichkeiten, mit derselben zu kommunizieren. Da zur Entstehungszeit des Romans gerade das erste außerhalb unseres Sonnensystems gelegene Planetensystem entdeckt wurde, nämlich das des 26 Lichtjahre von der Erde entfernten Sterns Wega, siedelt Sagan die intelligente Spezies, die mit der Menschheit Kontakt aufnimmt, auch genau dort an. Ist eine Kommunikation zwischen der Erde und einem Planeten der Wega aus linguistischen Gründen ohnehin bereits sehr mühsam, kann eine solche aufgrund des langen Übertragungsweges auch nur sehr bescheiden sein. Praktisch verbleibt (in einem durchschnittlichen Menschenleben) nur die Möglichkeit einer einzigen Kontaktaufnahme.

Wenn eine intelligente Spezies Radiowellen ins All senden will, um auf ihre Existenz aufmerksam zu machen, muss sie darauf achten, dass der potentielle Empfänger möglichst gute Chancen hat, die Radiobotschaft überhaupt zu bemerken. Ein umfassendes Verständnis derselben ist zwar wünschenswert, aber sekundär, denn bereits mit dem wahrgenommenen Empfang des Signals wird auf jeden Fall die Kernbotschaft verstanden, die etwa lauten mag: »Schaut euch unser Signal genau an und erkennt, dass ihr nicht alleine im Weltall seid.«

Die kosmische Botschaft soll also möglichst einfach sein, jedenfalls so einfach wie möglich beginnen, muss aber auch eine Struktur besitzen, die erkennbar anders ist als eine der ohnehin ständig auf der Erde eintreffenden Radiowellen, die kosmisch-natürlichen Ursprungs sind (Quasare, Pulsare, Radiogalaxien). Naheliegenderweise werden zu Beginn der Botschaft Zahlen gesendet, da die Zahlen als der einfachste Teil einer wahrhaftig universellen Sprache anzusehen sind. Nun könnte man z.B. die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 usw. in einfachsten Pulsen (ein Puls, Pause, zwei Pulse, Pause, drei Pulse, Pause usw.) senden. Diese Folge ist aber wenig originell und einer außerirdischen Intelligenz (und Sagans) nicht würdig. Im Roman wird daher eine andere Zahlenreihe zur ersten Kontaktaufnahme gewählt, nämlich

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

Diese Reihe mag auf den ersten Blick als Reihe von Zufallszahlen erscheinen und somit noch ungeeigneter für eine kosmische Botschaft sein als die Reihe der natürlichen Zahlen. Bei näherer Betrachtung (und mit der dazu erforderlichen mathematischen Vorbildung) erkennt man allerdings, dass Signale aus dem Weltall, die diese Zahlenreihe bilden, mit absoluter Sicherheit von einer außerirdischen Intelligenz verursacht wurden, stellt sie doch in lückenloser Reihenfolge die Primzahlen dar:

Eine natürliche Zahl p größer als 1 heißt Primzahl, wenn es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, die beide größer als 1 sind, sodass $p = m \cdot n$ gilt. Die Primzahlen sind somit unteilbar, sodass man sie im wahrsten Sinne des Wortes als Atome bezeichnen kann. (Obwohl die Zahl 1 zweifellos auch unteilbar ist, rechnet man sie aus guten Gründen nicht zu den Primzahlen.)

Die Primzahlen spielen in der Mathematik eine dermaßen fundamentale Rolle, dass sie jeder intelligenten Spezies vertraut sein müssen, die Radiosignale empfangen kann, weil jedem technischen Knowhow zwangsläufig ein mathematisches vorangeht. Überdies

weiß man, dass die Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in gewisser Weise nicht maschinell produzierbar, jedenfalls nicht ohne Intelligenz produzierbar sind, sodass die Primzahlenreihe geradezu eine ideale intragalaktische Grußbotschaft darstellt.

1.2 Eine einfache Frage

Dass die Zahlen zentrale Objekte der Mathematik darstellen, wird niemand bestreiten, ausgenommen manche Mathematiker, die im polemischen Überschwang dem Laien kundtun wollen, Mathematik habe mit Rechnen eigentlich gar nichts zu tun. Mathematik zu betreiben vermag eben nur der kreative Mensch, irgendetwas irgendwie ausrechnen kann jeder Computer, diese modernste Version einer Rechenmaschine. Als ein Hauptziel des Buches kann die möglichst umfassende und fundierte Beantwortung der Frage

Was ist die Quadratwurzel aus zwei?

angesehen werden. Tatsächlich ist diese Frage ungleich schwieriger zu beantworten als die analoge Frage nach der berühmten, lange Zeit geheimnisumwitterten Quadratwurzel aus minus eins, auf die wir nicht eingehen werden. Auch wenn man in der Schule erfährt, dass $\sqrt{2} = 1.414213...$ gilt, hat man damit eigentlich nichts gelernt. Was bedeuten die Punkte »...« nach der 3? Wenn nach der 3 noch weitere Ziffern kommen, was durch »...« wohl symbolisiert werden soll, wie viele und welche? Wenn man lernt, dass $\sqrt{2}$ ein »unendlicher Dezimalbruch« ist, was soll das eigentlich heißen? Wie soll man mit einer Zahl rechnen, die man gar nicht aufschreiben kann, weil man mit dem Aufschreiben nie fertig wird? Wie kann es sein, dass das Quadrat eines solchen Ungetüms ein so braves und anschauliches Ding wie die Zahl 2 ist? Wenn 1.414213... aber nur ein Näherungswert der Länge der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1 ist, was ist dann ein Näherungswert und vor allem, was ist überhaupt die Länge einer Strecke? Glauben wir – wenn überhaupt – nur deshalb zu wissen, was $\sqrt{2}$ ist, weil wir längst vergessen haben, dass wir es nie wirklich verstanden haben?

1.3 Der Hauptsatz der Zahlentheorie

Dass man ein ganzes Buch schreiben muss, um das Wesen von $\sqrt{2}$ zu erfassen, ist im »atomaren Aufbau« des Zahlbereichs begründet. Wenn wir noch ein wenig in der Analogie Atome – Primzahlen verharren, so beschreibt der Hauptsatz der Zahlentheorie diesen »atomaren Aufbau«: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 und selbst keine Primzahl ist, kann (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

So gilt z.B. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und es lässt sich die Zahl 60 (abgesehen von Umordnungen des zweimal auftretenden Faktors 2 und der jeweils einmal auftretenden Faktoren 3 und 5) nicht anders als Produkt von Primzahlen darstellen. Zur vereinfachenden Sprechweise sieht man eine Primzahl p auch als Produkt von Primzahlen: Dieses Produkt hat nur einen einzigen Faktor, nämlich p selbst. Dann kann man den Hauptsatz der Zahlentheorie kurz und bündig formulieren:

> Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, kann (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

Hier erkennen wir auch nebenbei, warum man die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen rechnet. Würde man das tun, dann wäre der Hauptsatz in der obigen Formulierung falsch. Man hätte dann z.B. die verschiedenen Darstellungen $60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $60 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $60 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ usw. Es ist einfach unpraktisch, die Zahl 1 zu den Primzahlen zu rechnen, da man dann nicht kurz von den Primzahlen,

sondern andauernd und umständlich von den von 1 verschiedenen Primzahlen sprechen müsste.

Der Hauptsatz der Zahlentheorie ist von eminenter Bedeutung für die Mathematik. Wir werden einen Beweis des Hauptsatzes in den Vertiefungen nachreichen, an dieser Stelle aber bereits mit einem kleinen gedanklichen Ausflug demonstrieren, dass der Lehrsatz alles andere als selbstverständlich ist, ja geradezu den Charakter eines Wunders hat. Wir lassen alle ungeraden Zahlen beiseite und betrachten statt der natürlichen Zahlenreihe die Reihe 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, … der geraden Zahlen. Da sowohl die Summe als auch das Produkt zweier gerader Zahlen wieder gerade ist, kann man im Bereich der geraden Zahlen genauso rechnen wie im Bereich der natürlichen Zahlen, sodass die beiden Zahlenbereiche vom strukturellen Standpunkt aus kaum zu unterscheiden sind. Gibt es »Primzahlen« im Bereich der geraden Zahlen? Selbstverständlich! Wir brauchen ja nur die alte Definition zu übernehmen und den neuen Gegebenheiten anzupassen: Eine gerade Zahl z nennen wir eine G-Primzahl, wenn es keine geraden Zahlen m und n gibt, sodass $z = m \cdot n$ gilt. Die Reihe der G-Primzahlen lautet dann folgendermaßen: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, … Denn offensichtlich ist eine G-Primzahl einfach das Doppelte einer ungeraden Zahl. und umgekehrt. Wie schaut es nun mit der Zerlegbarkeit gerader Zahlen in G-Primzahlen aus? Sind die G-Primzahlen die »Atome« in der neuen Welt der geraden Zahlen? Die Antwort lautet Ja und Nein! Tatsächlich kann man eine gerade Zahl, die keine G-Primzahl ist, stets als Produkt von G-Primzahlen schreiben. Im Gegensatz zu früher ist diese Darstellung aber selten eindeutig: Wegen $60 = 2 \cdot 30$ und $60 = 6 \cdot 10$ besitzt z.B. die Zahl 60 zwei völlig verschiedene Zerlegungen: die eine mit den G-Primzahlen 2 und 30, die andere mit den G-Primzahlen 6 und 10. Dieses Beispiel ist typisch, denn offensichtlich besitzt eine gerade Zahl, die das Vierfache des Produkts zweier von 1 verschiedener ungerader Zahlen ist, immer mindestens zwei verschiedene Zerlegungen in G-Primzahlen.